社会で生かせる数学の教授法

高知県立山田高等学校　教諭　堅田一郎

1　はじめに

高校数学の内容を将来直接に扱わない生徒から、数学を勉強する目的や意義について、疑問を投げかけられることが少なくない。このような生徒に対して、数学の実用的有用性を強調しても、現実味は薄い。なぜなら、生徒たち自身が数学を直接活用することは現実にはないからである。このような生徒の疑問に真摯に答えるため、『社会で生かせる数学の教授法』という研究課題を設定した。

こうした生徒が実社会で生かすことができるのは、高校数学の内容ではなく、その内容を通して身につけた「数学的考え方」と考えるべきである。実際、生徒たちが高校数学に最も期待しているのは、「数学的考え方」の育成であり、特に「論理的考え方」の育成である。このことは、長崎らによる調査(長崎 2003)や筆者が行った調査(2005 実施)で明らかに示されている。

「論理的考え方」の育成を考えたとき、特に深く関与しているのは「証明指導」である。

國本(1996)は「今日の日本のような高度情報社会において、氾濫する情報の中から、正しい情報と間違った情報を識別、取捨選択する能力、情報を収集しそれを処理する能力、そしてそれらの情報を分析し、それに基づいて、新しい情報を創造、発信する能力が必要である。・・・(中略)・・・・・この中で、情報の処理･分析においては、論理的思考力が、重要な役割を果たすであろう。･･･(中略)････数学教育学の中では、論理的思考力の育成には、特に、論証幾何あるいは証明指導を通して行われている」と述べている。

したがって、『社会で生かせる数学の教授法』は、「論理的考え方」の育成を図る教授法であるが、その具体的指導法として最も考察すべきは「証明指導」であるという結論に至った。

そこで、本研究においては、研究課題の対象を「証明指導」に焦点化して考察することにした。

2　研究の目的

本研究の目的は以下の２つに要約できる。

・数学的活動における証明の機能を、明らかにすること。

・証明の機能を生かす数学の教授・学習を考察すること。

3　研究の内容

(1)　数学的活動における証明の機能について

Gila Hanna(1995)は、De Villiers の論文（1990）を参照して、数学者の研究活動における証明の機能を、次の 5 つに分類している。

①　命題が正しいか検証すること

②　なぜ正しいのかを説明すること（理解を促進すること）

③　体系化すること(概念や定理の結果を組織的にまとめること)

④　発見すること(新しい結果を発見、発明すること)

⑤　コミュニケーション(数学知識の伝達)

以上の①〜⑤の機能の中で、筆者は、数学教育においては、「①命題が正しいことを検証すること」、「②なぜ正しいのかを説明すること」、「④発見すること」が重要であると考えている。

本稿では、②について理論的考察を言及し、①、④について実践的考察を言及したい。

(2)　証明の「なぜ正しいのかを説明すること」の機能を生かす数学の教授・学習について

Hanna(2000)は、証明の「なぜ正しいのかを説明する機能」は、さらに深い数学的性質の理解を促すと述べている。さらに、そのような機能にすぐれた証明は、「その定理にとってさらによい定義の必要性を見出せることも示し、有用なアリゴリズを生み出す」と述べている。

また、このような証明の形式や方法は、学年やクラスの状況あるいは生徒の数学的経験に応じて、具体的数値計算によるものや前形式的証明(図示的なものの含め)、形式的証明など、教育的に適切に選択されて扱われるべきであると提言している。

例えば、１＋２＋３＋・・・・・・・＋n＝n(n+1)/2 の証明を図１のような図示によるものと、図２のような数学的帰納法によるものとを対比させてみる。図１の証明は、数学的帰納法の証明に比べて、厳密性では劣っているが、図１の方が、多くの生徒が「n(n+1)/2」を長方形の面積の半分であるという具体的イメージに結び付けやすく、式を理解しやすい。

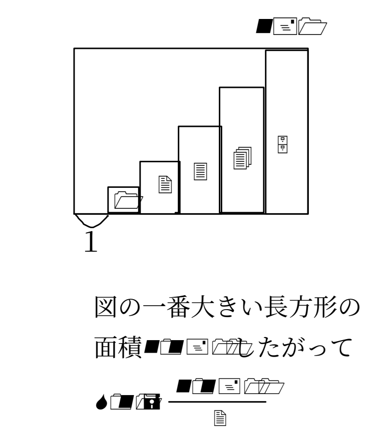


図１

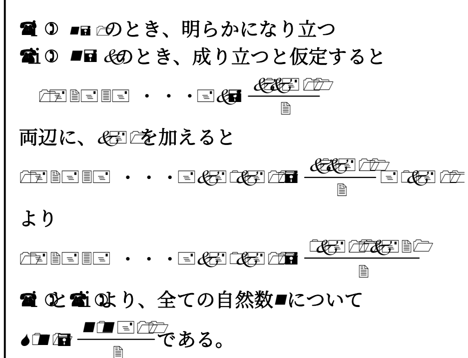
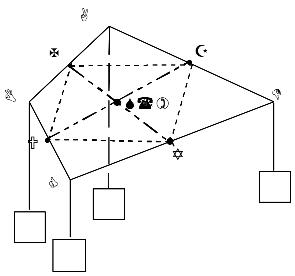


図２

さらに、高校数学で扱われるべき具体的な証明の例として「力学を使ったチェバの定理や四角形の中線定理の証明」や「図示的な証明(Visual　proof)による無限級数の収束の証明」などを挙げている(Hanna & Jahnke 2002)。以下においては、「四角形の中点定理」を例として挙げる。

『四角形の中点定理』



（証明）各辺は質量がないものとする。A,B,C,D に同じ質量を置くとき、AB、CD の重心は各中点で X、Y とする。そして、XY の重心は XY の中点 S である。同じことを、AD、BC で行う。AD、BC の中点を Z,U とする。ZU の重心が中点 T である。S、T は四角形 ABCD の重心である。重心は１つしかないのでは一致する。したがって、XY、ZU を四角形 XUYZ の対角線と見ると互いに中点で交わるので、四角形 XUYZ は平行四辺形の必要十分条件（互いの対角線は他を２等分する）を満たす。

(3) 証明の「命題が正しいか検証すること」の機能を生かす数学の教授・学習について

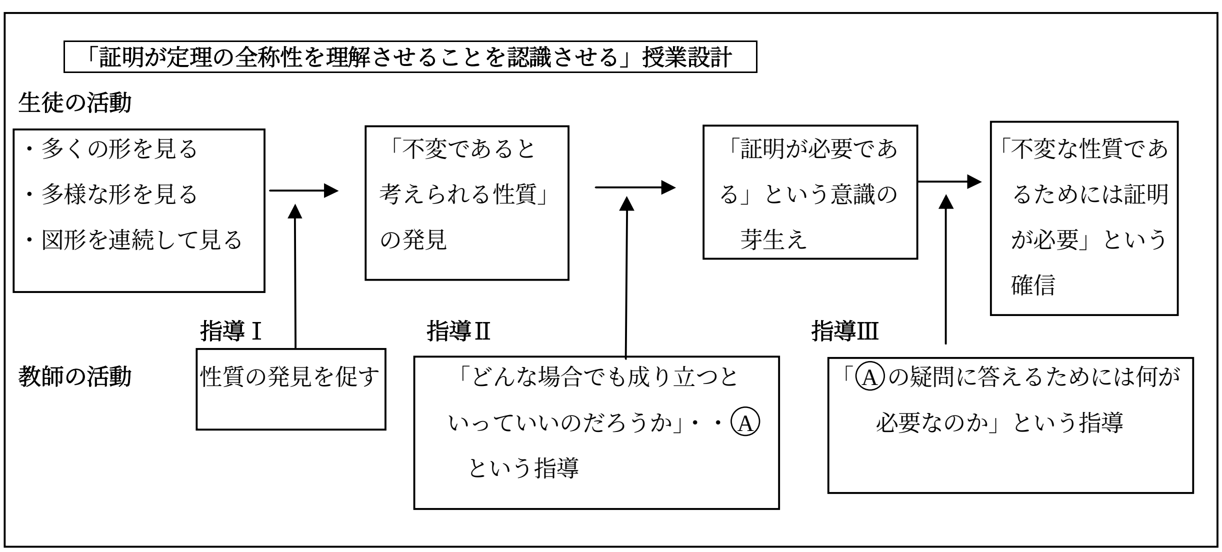
証明の「命題が正しいか検証する」機能の主要な側面は、「定理の全称性」を保障することである。ここでは、「定理の全称性」は証明によってはじめて保障できることを理解させるために、動的幾何ソフトを活用する授業を設計し，その有効性について実践し考察した。

① 授業設計

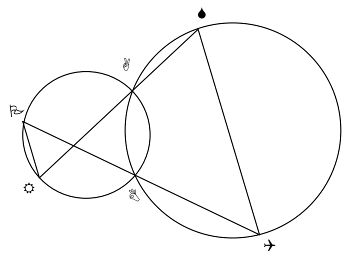
Hanna(2000)は証明指導における動的幾何ソフトの活用について、「生徒自身がソフトを使って図形を作図することによって、その性質をより深く理解することができ、命題の意義を調べることが可能になった」と述べている。一方, Hanna は、コンピューターの精度を過信するために、「生徒だけでなく教師までが、コンピューターで探求することによって、もはや証明を行う必要がないと考えてしまう」という危険性も指摘をしている。

しかし、筆者は、むしろ、この危険性を上手く利用することで、生徒に「定理の全称性」を保障するには証明によらなければならないことを理解させることが可能ではないかと考えている。

授業設計は次の通りある。まず、動的幾何ソフトを活用して、生徒自身に図を連続して多様に変形させる。すると、生徒自身で「不変な性質」を見出させることができる。そして、生徒は、パソコンで見る限りではどのような場合でもその「不変な性質」が成り立っているように思うようになる。まさに、このとき、「本当に、どんな場合でも成り立つといっていいのか」と発問して「定理の全称性」の問題意識を喚起する。そして「この疑問に答えるためには何が必要であるのか」と発問すると、そのためには証明が必要であることを理解させることができると考えた。



② 教材



右図のように、２つの円の交点 A、B を通る直線が、この２円と P、Q および R、S で交わっている。この条件で、生徒に動的幾何ソフトを使用させ、どのように動かしても、PR と SQ が平行であることを発見させ、どのような場合でも平行であることを保証するには証明が必要であることを理解させる。

③ 授業の実際

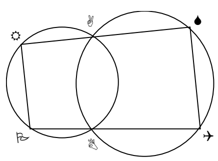
【授業参加者】教師 T･･･筆者、　高校２年生 A 君,B 君･･･男子　C さん,D さん･･･女子

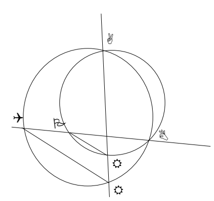
【使用パソコン】　教師・プロジェクター表示用･･･１台、生徒操作用･･･２台

【動的幾何ソフト】Cabri　GeometryⅡ

まず，パソコンの画面に右上の図を与え、生徒自身に操作させ、変形させた。

男子２人は、最初の与えられた図で円周上の点だけを動かしていたが，女子２人は，円周上の点だけではなく円も動かし、下のような位置関係の図も作っていた。





教師 T「何か、気がついたことはないか」 ← 指導Ⅰ

生徒 A 君「角が同じです。」

教師 T「どの角が同じですか」

生徒 A 君「・・・・・・・・・」

(黙ってしまった)

生徒 C さん「PR と SQ が平行です」

教師 T「パソコンで、どんな場合でも平行といえますか？」 ← 指導Ⅱ

（しばらく、考えた後）

生徒 D さん「いえない。まだ、他に平行でない場合があるように思える。」(他の３人もうなずいていた)

教師 T「そうだね。パソコンですべての場合をすべて作図することはできないからね」

教師 T「それでは何が必要ですか」 ← 指導Ⅲ

生徒 D さん「証明だと思います。」　(他の３人もうなずいていた)

④ 授業の分析と考察

C さんの発言をみる限り、動的幾何ソフトを活用したことで、生徒自身で「不変な性質」を発見させることに成功をしている。生徒の感想文の中にも「発見できて、良かった」というも

のがあり、情意面においても発見の喜びをもたらしているように思える。そして、教師の「パソコンで、どんな場合でも平行といえますか」という問いがきっかけとなり、生徒は、しばらく考えているとき「動的幾何ソフトで、どんな場合も平行であるから間違いない」という気持ちから「本当にそうだろうか」という疑問が高まってきたと考えられる。そして、「それを確証するためには何が必要なのか」という疑問に答える形で「証明をしなければいけない」という気持ちが起こったと考えられる。そして、他の生徒も、D さんの発言を聞いてうなずいていたことから「定理の全称性」を示すには証明をすることが必要であることを認識できたと思われる。このことは、Hanna のいう「コンピューターで探求をすることによって、もはや証明を行う必要がないと考えてしまう」危険性が上手く転換され、「定理の全称性」を保障するには証明によらなければならないという理解に繋がったと考えられる。生徒の感想文の中にも「証明をどうして行わなければならないのかが良く分かった」というものがあった。

(4) 証明の「発見をすること」の機能を生かす数学の教授・学習について

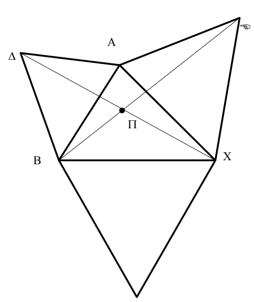
宮崎(2002)は、Freudenthal(1973)の言う「活動としての数学」すなわち「生徒が自分の手で数学の再発明（re-invention）をすること」の重要性を主張している。そして、証明の発見の機能を Freudenthal の「再発見」の一つとして捉え，証明を数学的探求活動に位置づけようとしている。宮崎(2002)は、証明活動における発見の様相を、「命題を証明した後、その証明に基づいて、一般化・特殊化された命題を生成すると共に、もとの証明に習って、新たな証明をも生成できることがある」と説明している。このような発見活動を取り入れた実践授業を考察し、実践した。

① 授業設計

まず、以下ようなの命題１の証明を行う。そして、その証明を反省し、円周角の定理の逆や円に内接する四角形の定理とそれらの適応の状況を見直すことで、新たな命題２の証明を生成させた。

② 教材

【命題１】



右の図のように、三角形 ABC において、AB、AC、BC を一辺とする正三角形 ABD、三角形 ACE、三角形 FBC において、A、P、C、E は同一円周上にあることを説明せよ。

(説明)

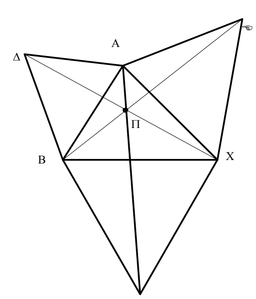
① △ACD≡△AEB

② ①より∠ＡＥＢ＝∠ＡＣＤ

③ 円周角の定理の逆より

Ａ、Ｐ、Ｃ、Ｅは同一円周上にある。

【命題２】 課題１において、Ａ、Ｐ、Ｆは同一直線上にあることを証明せよ。



③　授業の実際

【授業参加者】教師T･･･筆者、　高校３年生２５名

命題２が成り立つためには何が必要なのかを考察させたが、なかなか答えがなかった。
そこで、∠APCの角度を考えてみるように指示をした。
生徒の中から「120°」という答えが返ってきた。「どうして、こうなるの」という発問で、
「A,P,C,Eが同一円周上にあるので、∠APC＝180°－∠AEC＝180°－60°=120°」----(a)
という根拠が生徒から説明がでてきた。
∠APC＝120°だから，後は　∠CPF＝60°を示せばいいことになる。
しばらく、生徒たちは考えていたが、「∠BPCの角度は何度だろうか」を発問すると
「∠BPC＝120°」と答えた。「なぜか」と発問することで、「A,P,C,E が同一円上にある」という答えとともに、このことが意識化され、生徒たちは
「∠BPC＋∠BFC＝180°であるのでP,B,F,Cが同一円周上」----(ｂ)
であることに気づいた。さらに、そのことから生徒から
「∠CPF＝∠CBF＝60°」----(ｃ)
であるという答えが返ってきた。

④　授業の分析と考察

証明される定理を構成していく定理を「構成定理」と呼ぶことにすると、上記の(a)、(ｂ)、(ｃ)を導出するのに、以下のような３つの構成定理が使われている。

「構成定理A」―――「円に内接している四角形の対角は２直角である。」
「構成定理B」―――「四角形の対角の和が２直角のとき、その四角形は円に内接する」
「構成定理C」―――「円周角の定理」

この定理の本質は『「A、E、C、P」「A、D、B、P」がそれぞれ、同一円上にあることから、「F、B、P、C」もまた、同一円上にある』ということを導出するところにある。

生徒たちは、次のように、「構成定理A」「構成定理B」「構成定理C」を意識することで、このことに気がついてきたと考えられる。

生徒たちは、命題１の証明において、A、P、C、Eが円周上にあることから、四角形APCE は円に内接していると見直し、「構成定理 A」を意識した。そして、さらに、それを、B、F、C、Fに適応することで、「構成定理B」を意識した。

また、「構成定理 C」は、命題１で行った「「C、F、A、P」が同一円周上にある証明で活用した「円周角の定理の逆」が見直されたと考えられる。

すなわち、命題１の証明を反省することで、新たな証明を生成したと考えられる。このように、実践で、「証明の発見の機能」を生かすためには「構成定理」を意識させる効果的な教材と発問を行うことが必要で、それによって、生徒を証明の「発見の文脈」に乗せることができることがわかった。

4　研究のまとめ

『はじめに』で述べたように、数学の学習で、社会で生かせるのもとして「数学の考え方」、特に「証明指導」を位置づけてきた。ここでは、証明機能の中で、「発見の機能」「なぜ正しいのかを説明することの機能」「検証の機能」を取り上げげた。そのことに対するまとめを述べてみたい。

(1)「発見の機能」について

実践授業を通じ、生徒たちが証明の「発見の機能」を学習することで、自分たち自身で、数学を創造できるという「数学感」を持つことができた。感想文においても「証明を創っていく喜びを感じた」という記述が見られた。これは、数学以外においても、生産的、創造的な活動の出発点となると考えられる。

(2) 「なぜ正しいのかを説明することの機能」について

数学事項について、「なぜ、こうなるのか」を理解することは、数学事項を、真に理解するために必要である。その証明はその補助となる。そのような図的な証明や物理的な証明を数多く見出すことができた。そのような証明を、単独で活用するのではなく、「発見」などの他の数学活動とともに活用できるように教材化したい。今後の課題は、証明を活用することで、元の命題の一般化や特殊化された命題、新しい証明、新しい概念を創造できるような教材を開発することである。

(3) 「命題が正しいか検証することの機能」について

生徒たちは、「なぜ、証明をしなければならないのか」を理解せずに、単なる練習問題の１つとして捉えていることが多い。そこで、本稿では、動的幾何ソフトの活用によって「証明が定理の全称性を保障している」ことを、生徒に理解させることを目的とした。生徒は、このことを理解できたと考えられる。また、証明前の「探求」が、証明の必要性の認識に大きく係わっていることもわかった。今後とも証明をする前の命題を「探求」することと「証明が、定理の証明を保障する」こととの係わりを考える。

（本稿の引用・参考文献）

De Villiers,M.(1990). “The role and function of proof on mathematics” Pythagoras　24　pp.17-24.

Freudenthal,H. (1973). Mathematics As An Educational　Task , D.Reidel Pub.

Hanna,G.(1995). “Challenges to the Importance of　Proof”　for the learning of mathematics　15 (3)　pp.42-49.

Hanna,G.(2000). “Proof, explanation and explorations : An Overview” Education Studies in mathematics 44(1-2) pp.5-23.

Hanna,G. & Jahnke,H.N.(2002). “Arguments From Physics in Mathematical Proof an Educational　Perspective” for the learning of mathematics 22(３) pp.38-45.

國本景亀(1996).『空間直観力と論理的思考力を育成するための教材開発と指導法の改善』　平成６年度科学研究費補助金(一般研究(C))(課題番号 06680256)研究報告書.

長崎栄三(研究代表者)(2003). 「高等学校の理科教育と数学教育」 日本学術振興会科学研究費補助金 A(A) 高等学校の科学教育改革に関する総合的研究(課題番号 113006)　平成 11 年度～14 年度研究成果報告書　No.１.

宮崎樹夫(2002).「中学校数学において、生徒が証明の発見機能を活用するための諸条件に関する研究」　科学教育研究 Vol.26　No.5 日本科学教育学会.